$$\left(1-k^2\sin t\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n}k^{2n}\sin^{2n}t\ ;$$

le calcul ramène alors aux intégrales de Wallis : $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}t\,dt=\frac{1.3....(2n-1)}{2.4.6....2n}\frac{\pi}{2}$ d'où

$$K=\frac{\pi}{2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n}\right)^2k^{2n}\right].$$

Par exemple dans le cas du pendule, de longueur l, d'angle initial 2α on a la période

$$T=\frac{4K}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\alpha}{2}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\sin^4\frac{\alpha}{2}+...\right].$$

Evidemment si 2α n'est pas très grand au départ, $\frac{\alpha}{2}$ est vraiment petit et $\sin^{2n}\frac{\alpha}{2}$ encore plus... on ne verra pas vraiment l'écart de période par rapport au résultat classique.

Le paramètre de calcul de K est le module k ou l'angle modulaire $\frac{\alpha}{2}$: Legendre a dressé une table des valeurs de K au dixième de degré de l'angle modulaire, mais on l'obtient maintenant avec Maple :

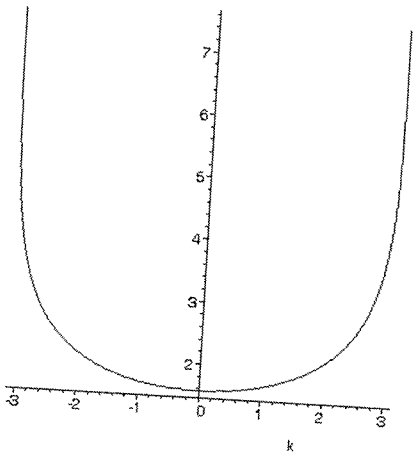

Fig. 70. Valeurs de K en fonction de k (*fonctions_elliptiques_3.mws*).

Comme k est en fait un sinus, le cosinus de l'angle modulaire va jouer son rôle également : on note donc k' le module complémentaire, $k'=\cos\frac{\alpha}{2}$, ce qui avec $k^2+k'^2=1$ donne aussi $2kk'=\sin\alpha$.

13.6.5. La moyenne arithmético-géométrique

À la suite de Lagrange, Gauss s'intéressa aux propriétés de la moyenne arithmético-géométrique dont il tirera des algorithmes de calcul très efficaces pour nos intégrales.

Soient deux réels $a\geq b>0$, on considère les suites (a_n) et (b_n) définies par :

13.6.5.1 $$\begin{cases} a_0 = a, b_0 = b, \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}. \end{cases}$$

Les a_n forment une suite de moyennes arithmétiques, les b_n une suite de moyennes géométriques. On a immédiatement par récurrence que $a_n \geq b_n$:

$$a_{n+1} \geq b_{n+1} \Leftrightarrow \frac{a_n + b_n}{2} \geq \sqrt{a_n b_n}$$
$$\Leftrightarrow \frac{a_n^2 + 2a_n b_n + b_n^2}{4} \geq a_n b_n \Leftrightarrow \frac{a_n^2 - 2a_n b_n + b_n^2}{4} \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a_n - b_n}{2}\right)^2 \geq 0 ;$$

on a également $a_n \geq \dfrac{a_n + b_n}{2} = a_{n+1} \geq b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq b_n$. Nos suites sont convergentes ; en passant à la limite sur 13.6.5.1 on obtient l'égalité des limites, limite appelée **moyenne arithmético-géométrique** des nombres a et b, notée $M(a, b)$.

On a également les propriétés suivantes :

* $M(a, b) = M(a_1, b_1) = \ldots = M(a_n, b_n) = \ldots$,
* Si c est un réel > 0, $M(ca, cb) = cM(a, b)$,
* $a_{n+1} - b_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} \dfrac{(a_n - b_n)^2}{\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}\right)^2} \leq \dfrac{1}{8b}(a_n - b_n)^2$: la convergence est quadratique.

Par rapport à nos préoccupations Gauss a démontré en 1816 le

13.6.5.2 **Théorème :** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}} = \frac{\pi}{2M(a, b)}$.

Preuve. Pour démontrer cette magnifique formule nous notons $I(a, b)$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}}$ et nous allons montrer que $I(a, b) = I(a_1, b_1) = \ldots = I(a_n, b_n)$.

Soit f la fonction $x \to \dfrac{2ax}{(a+b) + (a-b)x^2}$, de dérivée $f'(x) = 2a \dfrac{(a+b) - (a-b)x^2}{\left((a+b) + (a-b)x^2\right)^2}$. f est croissante sur $[0 ; 1]$, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Posons alors $\sin t = f(\sin u)$, autorisé grâce aux propriétés précédentes, ce qui donne $\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = a \dfrac{(a+b) - (a-b)\sin^2 u}{(a+b) + (a-b)\sin^2 u}$ et

$$\cos t \frac{dt}{du} = \cos u \frac{df(\sin u)}{du} = 2a \cos u \frac{(a+b) - (a-b)\sin^2 u}{\left((a+b) + (a-b)\sin^2 u\right)^2}.$$

Ce changement de variables effectué dans $I(a, b)$ donne alors

$$I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{a + b + (a-b)\sin^2 u} \frac{\cos u}{\cos t} du ;$$

on a aussi $\cos t$: $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t = \dfrac{\left((a+b)+(a-b)\sin^2 u\right)^2 - 4a^2\sin^2 u}{\left((a+b)+(a-b)\sin^2 u\right)^2}$.

C'est ici qu'entrent en jeu les propriétés des suites a_n et b_n :

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=4a_1^2-2b_1^2 \text{ et } (a-b)^2=(a+b)^2-4ab=4a_1^2-4b_1^2 \ ;$$

on en déduit le numérateur de la fraction :

$$\left((a+b)+(a-b)\sin^2 u\right)^2-4a^2\sin^2 u=4a_1^2\left(1-2\sin^2 u+\sin^4 u\right)+4b_1^2\sin^2 u\left(1-\sin^2 u\right)$$
$$=4a_1^2\left(1-\sin^2 u\right)^2+4b_1^2\sin^2 u\cos^2 u=4\left(a_1^2\cos^2 u+b_1^2\sin^2 u\right)\cos^2 u,$$

d'où

$$I(a,b)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(a+b+(a-b)\sin^2 u\right)}{\left(a+b+(a-b)\sin^2 u\right)\sqrt{4\left(a_1^2\cos^2 u+b_1^2\sin^2 u\right)\cos^2 u}}\cos u\,du=I(a_1,b_1).$$

La convergence de $t\to\dfrac{1}{\sqrt{a_n^2\cos^2 t+b_n^2\sin^2 t}}$ lorsque n tend vers $+\infty$ est uniforme vers $I(a,b)=\dfrac{1}{M(a,b)}$, on peut intervertir limite et intégrale, soit

$$\lim_{n\to\infty} I(a_n,b_n)=I(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{M(a,b)}dt=\frac{\pi}{2M(a,b)}.$$

13.6.6. La moyenne arithmético-géométrique : application à la Lemniscate

Appelons ϖ (on prononce **pi script**) la longueur de l'arc de la lemniscate (L) ; dans le demi-quadrant positif, cette longueur s'exprime en polaires par :

13.6.6.1 $$\frac{\varpi}{2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}}d\theta \ ;$$

faisons le changement de variable $\cos 2\theta=\cos^2\varphi$, ce qui donne

$$\frac{\varpi}{2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\cos\varphi\sin 2\theta}d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\varphi}{\sqrt{\left(1-\cos^2\varphi\right)\left(1+\cos^2\varphi\right)}}d\varphi$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}}d\varphi=I(\sqrt{2},1)=\frac{\pi}{2M(\sqrt{2},1)}.$$

La longueur de la Lemniscate[1] est donc $4\dfrac{\varpi}{2}=2\varpi=\dfrac{2\pi}{M(\sqrt{2},1)}\Rightarrow\dfrac{\pi}{\varpi}=M(\sqrt{2},1)$; le nombre ϖ est transcendant (T. Schneider, 1937) et vaut 2, 622057554292119810465...

---

[1] Gauss avait conjecturé ce résultat numériquement : en 1799, il écrit dans son journal qu'il a obtenu la valeur de $M(\sqrt{2},1)$ avec 11 décimales, et que ceci « *ouvrira un champ tout à fait nouveau en Analyse* ».